

# MATEMATICKÉ MODELOVANIE UČENIA MATHEMATICAL MODELLING OF STUDY

Pavel Dederá, Ivana Tomčíková, Tatiana Mílecová

*Katedra základov inžinierstva, Elektrotechnická fakulta, Žilinská univerzita,  
Detašované pracovisko v L. Mikuláši, kpt. J. Nálepku 1390, 033 01 Liptovský Mikuláš*

**Abstrakt** V článku sa uvádzajú dva exaktné matematické modely učenia. Prevzatý model s konštantnou intenzitou učenia a autormi odvodený model s premenlivou intenzitou učenia sa prezentujú na dátach z reálnych pedagogických výskumov. Dokazuje sa a exaktne určuje ohraničenosť študijného výkonu v závislosti na osobných, resp. skupinových parametroch učenia a zabúdania. Pre celkový výkon je parametrom s rozhodujúcim vplyvom parameter zabúdania.

**Summary** The paper deals with two exact mathematical models of study: A borrowed model with constant intensity of study and a model with variable intensity of study derived by the authors are presented using data acquired in real pedagogical research. The bounding of study performance is proved and precisely determined in dependence on personal (group) parameters of study and intensity of forgetting. The parameter of forgetting has decisive influence on total performance.

## 1. ÚVOD

V procese učenia sa osvojujú vedomosti, zručnosti a návyky, formuje sa vzťah k okoliu a svetu, poznávacie schopnosti a tvorivé sily študentov. Predmetom našich modelov bude proces osvojovania vedomostí ako časová funkcia.

Každý model predstavuje silne zjednodušený systém vybraných prvkov, ktorých aktivácia rieši istú hlavnú ideu tohto systému. Model potrebujeme napríklad vtedy, ak chceme vhodnou zmenou parametrov docieľiť optimálne fungovanie systému.

Cieľom článku je rozšíriť známy model učenia s konštantnou intenzitou na prirodzenejší prípad učenia s premenlivou intenzitou učenia.

## 2. MATEMATICKÝ MODEL UČENIA S KONŠTANTNOU INTENZITOU

Model publikovali Komenda – Klementa 1982 [1]. Dederá – Bača 2003 [2] z neho vychádzali pri návrhu originálnej metódy hodnotenia efektívnosti vzdelávania, pričom používali štatistické dáta z reálnych pedagogických výskumov Bača 2003 [3] a Bellová [4].

Zavedieme nasledovné veličiny:

$V(t)$  je časová funkcia „nadobúdania vedomostí“. Tu hneď povedzme, že každý učiteľ má špecifické predstavy o pojme „vedomosť“ a jej meraní a hodnotení a to pre každý predmet či tému. Napr. Skála (1985, VŠTS Liberec, nepubl.) sa v prednáškach zaoberal definovaním a meraním vedomostí aparátom teórie informácie, keď každému pojmu a vzťahu priradil informačnú hodnotu vyjadrenú bitmi. Gunčaga[5] posudzuje vedomosti vo forme kreatívnosti myslenia cez netradične vybudovaný pojem limity. V tomto článku vedomosť ako zložitá štruktúra nebude predmetom, ale len prostriedkom pre vyjadrenie efektu učenia v tej najjednoduchšej forme množstvom „naučeného, zvládnutého učebného textu štandardného formátu a približne rovnakej obtiažnosti“. Každý učiteľ pozná obsah tohto pojmu, pretože jeho zobrazenie do

škály hodnotenia študijného výkonu je nutnou súčasťou jeho profesie.

$\alpha$  ... koeficient učenia. V tomto článku ním vyjadrujeme počet zvládnutých strán textu za jednotku času, ktorou bude jeden deň.

$\beta$  ... koeficient zabúdania. Vyjadrujeme ním podiel zabudnutého textu k naučenému textu v tej istej časovej jednotke.  $\beta$  nadobúda hodnoty z intervalu  $\langle 0;1 \rangle$ . Pri hodnote 0 je všetko zapamätané, pri hodnote 1 je všetko naučené v tom dni zabudnuté.

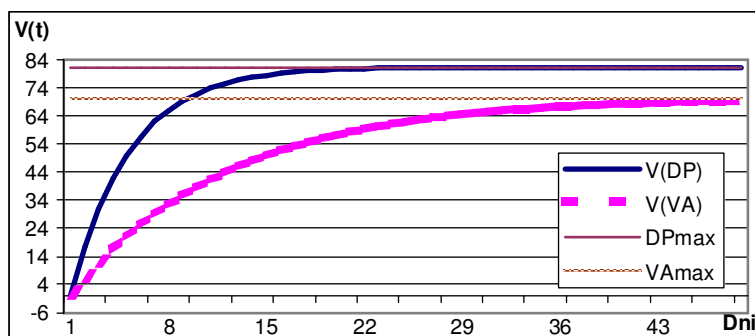
V [1] bola pre tieto prvky odvodená diferenciálna rovnica

$$\frac{dV(t)}{dt} + \beta V(t) = \alpha, \quad (1)$$

ktorá pri počiatočnej podmienke  $V(0) = 0$  má partikulárne riešenie

$$V(t) = \frac{\alpha}{\beta} (1 - e^{-\beta t}). \quad (2)$$

Podrobnejšie sa rovnicou ako modelom učenia s využitím pre hodnotenie efektívnosti novej vyučovacej metódy zaoberá článok [2], kde koeficienty  $\alpha, \beta$  sú zistené pedagogickým výskumom vo Vojenskej akadémii (VA) v rámci spracovania dizertačných prác [3], [4]. Obdobný výskum vykonali autorky tohto článku na Detašovanom pracovisku Žilinskej univerzity (DP) v zimnom semestri 2003/2004. V tabuľke 1 uvádzame štatistiku skupinových charakteristík na DP a VA, doplnenú limitným (maximálnym teoretickým) študijným výkonom, ktorým je podiel parametrov  $\alpha/\beta$ . Na obrázku 1 prezentujeme grafické riešenie rovnice učenia s konštantnou intenzitou a limitné výkony v porovnaní vzoriek z Vojenskej akadémie (VA) a Detašovaného pracoviska Žilinskej univerzity v Liptovskom Mikuláši (DP).



Obr. 1. Porovnanie modelov učenia s konštantnou intenzitou z dvoch výskumov  
Fig. 1. Comparison of models of study with constant intensity with data acquired in two separate researches

Tab. 1. Vybrané parametre učenia (skupinové koeficienty)

Tab. 1. Selected parameters of study (group coefficients)

Škola	Detašované pracovisko ŽU		Vojenská akadémia	
Parameter	$\alpha$	$\beta$	$\alpha$	$\beta$
Stredná hodnota	19,4	0,2383	6,2	0,0878
Rozptyl	331,24	0,031	125,44	0,0121
Smerod. odchýlka	18,02	0,175	11,2	0,11
Šikmosť	1,7	2,07	1,98	-0,652
Špicatosť	2,31	5,95	3,25	2,78
Interv. odhad (0,95)	(14,111;24,694)	(0,187;0,28)	(3,5; 8,9)	(0,0755;0,10)
Limitný výkon	81,4		70,6	

### 3. MATEMATICKÝ MODEL UČENIA S PREMENLIVOU INTENZITOU UČENIA

Predchádzajúci model rozšírime akceptovaním faktu, že intenzita učenia subjektu vo všeobecnosti nikdy nie je konštantná, ale je určitou funkciou času. Nech teda  $k$  funkciou učenia  $V(t)$  a konštante zabúdania  $\beta$  je  $\alpha(t)$  funkcia priebehu (závislosti) intenzity učenia na čase a  $o(\Delta t)$  je nekonečne malá veličina. Procesy učenia a zabúdania sa uskutočňujú súčasne, preto platí

$$V(t + \Delta t) = V(t) + \alpha(t) \Delta t - \beta V(t) \Delta t + o(\Delta t). \quad (3)$$

Delením rovnice  $\Delta t$  a limitným prechodom  $\Delta t \rightarrow 0$  získame po úprave diferenciálnu rovnicu

$$\frac{dV(t)}{dt} + \beta V(t) - \alpha(t) = 0, \quad (4)$$

ktorá za počiatočnej podmienky  $V(0) = 0$  (na začiatku učenia spravidla nevieme nič) má partikulárne riešenie

$$V(t) = \left[ \int_0^t \alpha(t) e^{\beta t} dt \right] e^{-\beta t}. \quad (5)$$

Pedagogická skúsenosť potvrdzuje teoretické predpoklady pedagogickej psychológie o premenlivom charaktere intenzity učenia (Linhart [6], Homola [7]) v závislosti od pôsobenia pozitívnych motívov a „anti motívov“ učenia (únavy, zdravotných a osobných problémov, iných rušivých príčin a vplyvov). Preto nahradíme reálnu závislosť intenzity učenia periodickou funkciou

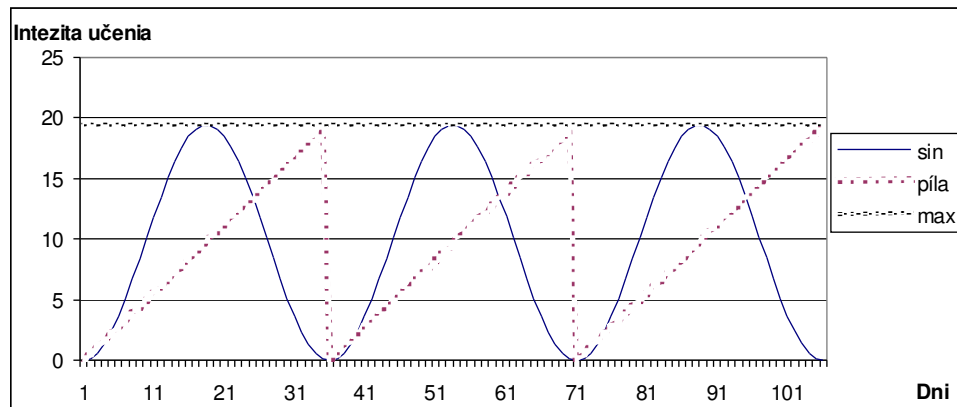
$$\alpha(t) = \frac{\alpha}{2} (1 - \cos \omega t), \quad (6)$$

kde  $\alpha = \max\{\alpha(t)\}$ ,  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  je kruhová frekvencia periodickej zmeny intenzity učenia a  $T$  je perióda extrémov funkcie  $\alpha(t)$ . Zároveň  $T$  je aj perióda, v ktorej je nutné zaradením vhodného motívu podnietiť opätovný návrat silnejšej intenzity učenia. Skúsený pedagóg predvída tento priebeh a vo vhodnom čase zaraďuje do výučby motívy ako kontrolné práce, seminárne vystúpenia apod. nielen preto, že to predpisuje študijný a skúšobný poriadok fakulty.

Motivované správanie je determinované celým radom činiteľov. Isté motívy vedú k zvýšeniu aktivačnej úrovne, čo následne zvyčajne vedie k zvýšeniu výsledkov (Homola, cit. dielo, s.26). V našej práci je akceptovaná kognitívna teória motivácie, a preto sme ako prirodzené pre prostredie vysokej školy ako motívy vybrali ciele, ktoré najviac korešpondujú s aspiračnou úrovňou našich študentov: kontrolné práce a skúšku.

Predvýskum nás upozornil aj na možnosť extrémneho priebehu intenzity „pílou“, kedy okamžite po odznení motívu (napr. kontrolná alebo zápočtová práca) klesne študijná aktivita na nulu. Obidva priebehy,

pre prípad  $T = 3$ ,  $t = 105$  výučbových dní jedného semestra a prvej skúšky a skupinového koeficientu  $\alpha$ , zisteného na DP, sú na obr. 2.



Obr. 2. Porovnanie priebehov funkcie intenzity učenia  $\alpha(t)$

Fig. 2. Comparison of waveforms of the function of study intensity  $\alpha(t)$

Dosadením (6) do (5) dostaneme riešenie

$$V(t) = \left[ \int_0^t \frac{\alpha}{2} (1 - \cos \omega t) e^{\beta t} dt \right] e^{-\beta t}. \quad (7)$$

Po výpočte integrálu má konečné riešenie úlohy tvar  $V(t) =$

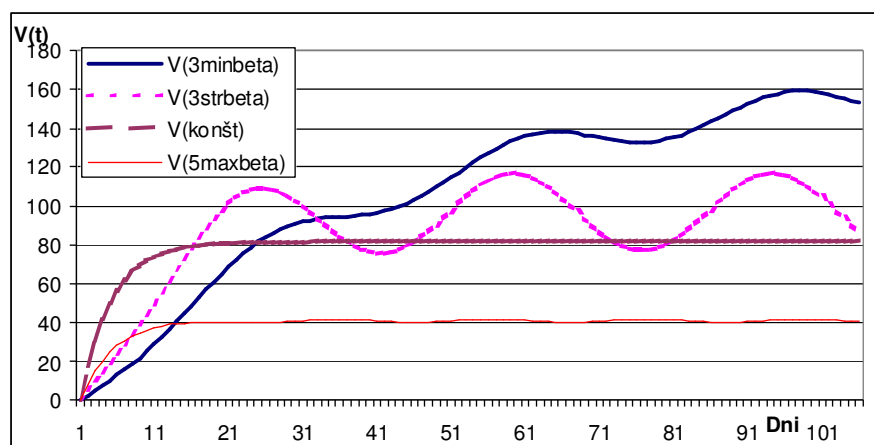
$$\frac{\alpha}{2} \left[ \frac{e^{\beta t} - 1}{\beta} + \frac{\beta - e^{\beta t} (\omega \sin \omega t + \beta \cos \omega t)}{\omega^2 + \beta^2} \right] e^{-\beta t}. \quad (8)$$

Maximum osvojených vedomostí určuje suprémum funkcie  $V(t)$ , pretože limita tejto funkcie pre  $t \rightarrow \infty$  neexistuje:

$$\sup\{V(\infty)\} = \frac{\alpha}{2} \left[ \frac{1}{\beta} + \frac{\max(\omega, \beta)}{\omega^2 + \beta^2} \right]. \quad (9)$$

#### 4. UKÁŽKA REALIZÁCIE MODELU S PREMENLIVOU INTENZITOU NA VÝSKUMNÝCH DÁTACH

Teoretický matematický model učenia s premenlivou intenzitou učenia sme overovali na dátach z vlastného a príbuzného ([3],[4]) výskumu. Zvolili sme jednoduchý model jedného predmetu v semestri, ktorý má zaradené dve alebo štyri kontrolné práce a skúšku v časovom intervale 105 dní (čiže 3 alebo 5 motívov). Skupinové parametre učenia a zabúdania  $\alpha, \beta$  pochádzajú z uvedených výskumov. Grafickým vyjadrením modelu a teda riešením diferenciálnej rovnice (7) v tvare (8) je príslušná krivka výkonu  $V(t)$  v čase  $t$ .



Obr. 3. Realizácie modelu učenia s premenlivou sínusovou intenzitou učenia

Fig. 3. Realisation of the model of study with variable sine-wave intensity of study

Pri všetkých ukážkach realizácie sme používali stredné  $\alpha = 19,4$ , zistené na DP a simulácie sme robili len na zmenách koeficientu zabúdania  $\beta$ . Viedlo nás k tomu experimentálne zistenie, že práve tento parameter má rozhodujúci vplyv na riešenie rovnice učenia.

Postupne sú zhora v grafe zobrazené tieto riešenia:

- V(3minbeta). Zaradené sú 3 motívy, čo na 105 výučbových dní určuje kruhovú frekvenciu  $\omega = 2\pi/35$ . Koeficient  $\beta = 0,1$  predstavuje dolný odhad pri spoľahlivosti 0,9 na DP a zároveň horný odhad na VA.
- V(3strbeta) má tie isté parametre, okrem tlmenia  $\beta = 0,2383$ , čo je stredná hodnota na DP.
- V(konšt) predstavuje na porovnanie s premenlivými intenzitami priebeh na DP pri konštantnej intenzite.
- V(5maxbeta). Zaradených je 5 motívov s kruhovou intenzitou  $\omega = 2\pi/21$ . Koeficient  $\beta = 0,28$  predstavuje horný odhad pri spoľahlivosti 0,95 na DP.

Z porovnania priebehov je zrejmé, že veľký koeficient zabúdania v poslednej realizácii v podstate utlmí kmity premenlivej intenzity učenia a spôsobí

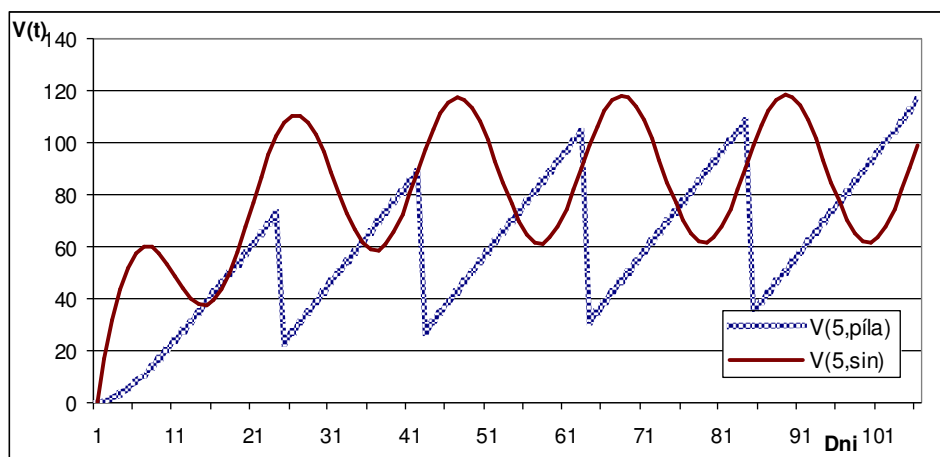
absolútny pokles výkonu napriek relatívne vysokému priebehu  $\alpha(t)$ .

V nasledujúcom obrázku je grafické vyjadrenie modelu vytvoreného na sínusovom a extrémnom pílovom priebehu intenzity učenia pri rovnakých parametroch ( $T$  je 5 motívov,  $\omega = 2\pi/21$ ,  $\alpha(\text{str}) = 19,4$ ,  $\beta = 0,187$ ).

- Riešenie V(5,sin) je analytickým vyjadrením riešenia rovnice (8).

- Riešenie V(5,píla) je analytickým vyjadrením riešenia rovnice (5), do ktorej sme vložili integrál hornej medze Fourierovho radu „pílového“ signálu.

Z porovnania priebehu je síce zrejmé limitné približovanie k tomu istému maximálnemu výkonu, ale stredná hodnota „sínusového“ signálu je zreteľne vyššia, čo dáva pedagógovi argument pri prezentácii odporúčanej techniky štúdia svojho predmetu študentom.



Obr. 4. Realizácie modelu učenia s premenlivou sínusovou a pílovou intenzitou učenia  
Fig. 4. Realisations of the models of study with variable sine-wave and saw intensity of study

## 5. ZÁVER

V rámci výskumu sme okrem iného regresnou a korelačnou analýzou zistili, že koeficienty  $\alpha$  a  $\beta$  sú lineárne nezávislé, nekorelujú spolu a dokonca nekorelujú ani s dĺžkou dennej doby učenia. Spolu s analýzou riešení rovnice učenia s premenlivou intenzitou učenia a simuláciou pri rôznych hodnotách týchto parametrov nám to dovoľuje najmenej tieto konštatovania:

*Všeobecné.* Existuje možnosť exaktne opísať priebeh učenia a obdobne zrejme aj priebeh získavania zručností, resp. návykov. Keďže náš model sleduje jeden predmet v semestri, zrejme model celého semestra predstavuje systém diferenciálnych rovníc tvaru (4), resp. riešení (7) alebo (8) s indexovanými premennými

$\alpha_i, \beta_i, \omega_i$ ,  $i=1,2,\dots,k$ , kde  $k$  je počet kreditných predmetov v semestri. Koeficienty by boli zisťované pre každý predmet osobitne.

*Pre pedagóga:* vhodným zaraďovaním motívov do organizačnej formy vyučovania možno vybudovať vyšší študijný výkon študentov. Tento výkon nie je neohraničený, študent, resp. skupina študentov má pri osobných parametroch učenia a zabúdania ohraňované maximum, ktoré neprekročí ani pri pridávaní času na učenie.

*Pre študenta:* zo štyroch vybraných parametrov učenia (časová dĺžka počtom dní na predmet, doba štúdia v jednom dni, intenzita štúdia a zabúdanie) má na celkový výkon najväčší vplyv parameter štvrtý. Ako nutné pri vysokoškolskom štúdiu (či skôr pred ním) sa nám javí zoznámenie s technikami racionálneho

a efektívneho štúdia. Ako veľmi neefektívny, a teda neodporúčaný, sa javí spôsob učenia, kedy po odznení motívu klesá okamžite študijná aktivita na minimum.

## LITERATÚRA

- [1] KOMENDA, J.- KLEMENTA, J.: *Analýza náhodného v pedagogickém výskumu a v praxi*. SPN, Praha 1988.
- [2] DEDERA, P. – BAČA, S.: *Meranie efektívnosti výučby pomocou analytického modelu* Zborník VA, X, č.3, Liptovský Mikuláš 2003, v tlači: 2 obr., 3 tab. – Lit. 10 zázn. ISSN 1335-0935
- [3] BAČA, S.: *Možnosti zvyšovania efektívnosti vyučovania v predmete riadenie špeciálnych vozidiel*. Dizertačná práca. Vojenská akadémia, Liptovský Mikuláš 2003. Dopusiaľ nepublikované.
- [4] BELLOVÁ, R.: *Možnosti zvyšovania efektívnosti vyučovania v predmete aplikovaná chémia*. Dizertačná práca. Vojenská akadémia, Liptovský Mikuláš 2003. Dopusiaľ nepublikované.
- [5] GUNČAGA, J.: *Možnosť využitia problémového vyučovania pri limitných procesoch*. Disputationes Scientificalae, ročník II, 2002, číslo 1. Katolícka univerzita, Ružomberok. S.3-8
- [6] LINHART, J.: *Psychologické problémy teorie učení*. SPN, Praha 1965.
- [7] HOMOLA, J.: *Motivace lidského konání*. SPN, Praha 1974.